Université Abdelmalek Es-saadi
FST Tanger

Année 2008-09
M122 : G6 & GE-GM

Contrôle continu N°. 1 [1]

Questions de cours :

a) Enoncer la définition de suite récurente et des suites adjacentes

b) Enoncer le théorème de Rolle

c) Enoncer le théorème des accroissements finis et donner une démonstration

Exercice 1: Trouver les limites suivantes:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan nx - n\tan x}{n\sin x - \sin x}$ $(n > 1)$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{1+x^2}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{(chx-1)\tan x}{x\ln(1+x+x^2)}$

Exercice 2. Soient (u_n) , (v_n) deux suites définies pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{2^2 3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2 n^2} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^3}$$

Montrer que elles sont adjacentes.

Exercice 3.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$.

b) Démontrer que $(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2)(|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$.

c) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < 1$ et une suite (x_n) définit par:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = a\sin x_n + b \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

c1) Démontrer que si $n \geq 1$, on a: $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - 1|$

c2) Démontrer que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $m \geq n$, on a:

$$|x_m - x_n| \leq \frac{a^n}{1-a}|x_1 - 1|$$

c3) Déduire que la suite (x_n) est convergente.

[1] Aucun document n'est autorisé

Exercice 4.

1) Rappeler l'allure du graphe de la fonction $x \longrightarrow Arctg(x)$ et préciser le signe de la fonction $Arctg(u) - u$ pour $u > 0$.

2) Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} Ln(Arctg(e^{x})); & x \leq 0 \\ th(x^2) + Ln(\frac{\pi}{4}); & x > 0 \end{cases}$$

2.1) Vérifier que f est bien définie sur IR. Montrer que f est continue sur IR.

2.2) a) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Calculer, pour $x > 0$

$$\lim_{x \to 0} = \frac{f(x) - Ln(\frac{\pi}{4})}{x}$$

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

3) Dresser le tableau de variation de f.

Formulaire

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad (th(u))' = \frac{u'}{ch^2(u)}$$

$$(Arctg(u))' = \frac{u'}{1 + u^2} \quad ; \quad Ln(\frac{\pi}{4}) = -0.241...$$



Contrôle continue N°: 1 08-09

Questions de Cours

a/ Suite recurrente : Toute suite definie par la donnée des premiere terme et une relation de recurence entre des terme consecutives

Suite adjacente : 2 suites (U_n) et (V_n) sont adjacente si $(U_n)\uparrow$, $(V_n)\downarrow$ et $\lim V_n - U_n = 0$ et $\forall n$: $U_n < V_n$

b/ T: Rolle : f cont sur $[a,b]$, derv sur $]a,b[$, $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ / $f'(c)=0$

c/ f continue sur $[a,b]$, f dervable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ /

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

Dem : On considere la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$ et on utilse le th de Rolle à g

Exercice 1

a/ $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan nx - n\tan x}{n\sin x - \sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{n(1+\tan^2 nx) - n(1+\tan^2 x)}{n\cos x - \cos x} = \frac{0}{n-1} = 0$$

b/ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(e^{1/x}-1)}{1+x^2} = \lim_{+\infty} \frac{x(e^{1/x}-1)}{x^2(1+1/x^2)} = \lim_{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \cdot \frac{1}{1+1/x^2} = 1\times 1 = 1$$

c/ $$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{ch}x-1)\tan x}{x\ln(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{x+x^2}{\ln(1+x+x^2)} \cdot \frac{\operatorname{ch}x-1}{x+x^2} = 1\times 1\times 0 = 0$$

car $$\lim_{0} \frac{\operatorname{ch}x-1}{x+x^2} \overset{H}{=} \lim_{0} \frac{\operatorname{sh}x}{1+2x} = 0$$

Exercice 2

- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante

- $$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^3} - U_n - \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} - \frac{1}{3n^3} =$$
$$= \frac{3n^2+3n+n^3-n^3-3n^2-3n-1}{3n^3(n+1)^3} = -\frac{1}{3n^3(n+1)^3} < 0 \Rightarrow (V_n) \text{ decroissante}$$

- $V_n - U_n = \frac{1}{3n^3} > 0$ et $\lim V_n - U_n = 0$ d'où le resultat

Exercice 3

a/ $f(x) = \sin x$

f cont sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc d'après le T.A.F

$\exists \theta \in]0, x[\ / \ f(x) - f(0) = (x - 0) f'(\theta)$

$\sin x = x \cos\theta \implies |\sin x| = |x \cos\theta| \leq |x|$ car $|\cos\theta| \leq 1$

b/ De même f cont sur $[u, v]$, dériv sur $]u, v[$ $\exists \theta \in]u, v[$

$/ \ f(u) - f(v) = (u - v) f'(\theta)$

$\sin u - \sin v = (u - v) \cos\theta \implies |\sin u - \sin v| \leq |u - v|$

c1/ $|x_{n+1} - x_n| = |(a \sin x_n + b) - (a \sin x_{n-1} + b)| = a |\sin x_n - \sin x_{n-1}|$

d'où d'après b/ $|x_{n+1} - x_n| \leq a |x_n - x_{n-1}|$

On a
$$\left.\begin{array}{l} |x_2 - x_1| \leq a |x_1 - x_0| \\ |x_3 - x_2| \leq a |x_2 - x_1| \\ \vdots \\ |x_{n+1} - x_n| \leq a |x_n - x_{n-1}| \end{array}\right\}$$
en faisant le produit membre à membre on obtient $\implies |x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - x_0|$

car $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n |x_1 - 1|$

c2/ $|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{n+1} - x_n|$

$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$

$\leq (a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a^n) |x_1 - 1|$

$\leq a^n |x_1 - 1| (1 + a + a^2 + \dots + a^{m-n-1})$

$\leq a^n |x_1 - 1| \left(\frac{1 - a^{m-n}}{1 - a}\right) \leq \frac{a^n}{1 - a} |x_1 - 1|$ car $1 - a^{m-n} \leq 1$

c3/ $\lim_{+\infty} \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| = 0$ car $0 < a < 1$ d'où

pour $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0 \ / \ \forall n > N : \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| < \varepsilon$

d'où $\forall m > n > N : |x_m - x_n| \leq \frac{a^n}{1-a} |x_1 - 1| < \varepsilon$

Ainsi (x_n) est une suite de Cauchy

donc (x_n) est convergente.